**第二十三届国际天文奥林匹克竞赛**

**理论试题答案**

斯里兰卡 科伦坡 2018年10月6日14日

**–1 水银镜面**

解: **1.1** 想象一个旋转着的水银液面. 在液面上的任意一点, 其液面的法线方向与垂线(转轴)方向的夹角为 = 2*r*/*g*, 其中为水银液面旋转的角速度, *r*为距离转轴的距离, *g*为重力加速度. 如果重力的方向保持恒定时, 角度与液面曲率半径*R*的关系可表述为: = *r*/*R*.

从以上两式我们可以得到: *R* = *g*/2 = *gT*2/42. 代入*g* = 9.8 m/s2和*T* = 86164 s,得: *R* = 1.84 109 m. 该球面镜面的焦距应该为: *F* = *R*/2 = 9.2 105 km.

但是, 这个结果只在地球表面是平面的情况下才适用(此时, 重力的方向才能保持恒定). 地球的真实情况是, 当离开北极点时, 垂线方向的变化速度比水银液面的快300倍(因为地球的半径比水银液面的曲率半径小300倍).

也就是说, 地球的自转只能使液面的曲率减少1/300, 而且熊所做的镜面是个凸面镜, 其曲率与北冰洋洋面的曲率基本一致.

因此, 正确的答案应该是“No”, 熊的主意不靠谱.

**1.2** 略.

**–1 星系距离**

解: 星系的红移为*z* = / = (H – H)/H = (6563 nm – 4861 nm)/4861 nm = 0.35.

在此*z*值下, 仍可以忽略相对论效应, 无论对哈勃常数持什么观点, 都可以得到下述的星系退行速度: *v* = *cz* = 105000 km/s.

根据哈勃定律, 星系的退行速度与距离成正比: *V* = *H*0 *L*, 其中*H*0为哈勃常数.

因为两个科学家所使用的哈勃常数不同, 他们也会得到不同的距离: *L*1 = *V*/*H*1, *L*2 = *V*/*H*2.

因此观测到同样视星等的超新星, 将得到不同的绝对星等的值:

*M*1 = *m* – 5lg(*L*1/10 pc), *M*2 = *m* – 5lg(*L*2/10 pc).

所以: *M*2 – *M*1 = –5lg(*L*2/*L*1), , *L*2/*L*1 = 10–0.38/5 = 0.840.

*H*1*L*1 = *V* = *H*2*L*2, *H*2 – *H*1 = *H*0.

可得: *H*1*L*1 = *H*2*L*2 = (*H*1 + *H*0) *L*1 (*L*2/*L*1),

*H*1 = *H*0 (*L*2/*L*1)/(1 – *L*2/*L*1).

数值解为: *H*1 = 14 km/s/Mpc 0.84/0.16 = 73 km/s/Mpc, *H*2 = *H*1 +*H*0 = 87 km/s/Mpc.

相对应的星系距离分别是: *L*1 = *V*/*H*1 = 1.44 Gpc, *L* = *V*/*H*2 = 1.21 Gpc.

**–2 火星大冲**

解: **2.1** 在大冲时(2018年7月27日), 火星应近似地位于太阳的相反方向, 即太阳6个月前的方向, 也就是1月27日的太阳位置, 此时太阳在摩羯座(Cap).

**2.2** 火星大冲重复的周期是:

*T*S = 1/(1/*T*E – 1/*T*M) = 1/(1/365.256 – 1/686.98) = 779.93天.

2003至2018年间隔大约15年, 其间有15*T*E/*T*S = 7.02个周期. 所以2018年的大冲应该发生在7个周期之后.

最简单的日期计算方法是, 7个周期所对应的时间为7 779.93 = 5459天, 2003年8月28日至2018年8月28日的时间间隔为365 15 + 4 = 5479天. 所以在2018年火星大冲发生的时间应早于8月28日20天, 即8月8日.

同理, 我们可以算出2035年的火星大冲日期. 2035年至2003年间应含32*T*E/*T*S = 14.99, 大约为15个周期, 即15 779.93 = 11699天. 从2003年8月28日至2035年8月28日的时间间隔为: 365 32 + 8 = 11688天.

所以2035年发生火星大冲的时间应晚于8月28日11天, 即2035年9月8日.

**2.3** 差别源自于火星公转轨道并不是完美的圆轨道, 它的公转角速度并不是均匀的. 在大冲时, 火星接近其近日点, 其轨道速度变大, 因此它的角速度与地球公转的角速度差会变小.

**2.4** 2035年大冲时火星比2018年大冲时的位置更靠近火星的近日点, 因此2035年的火星大冲会更亮些.

**–2 火星人观测**

解: 此时在火星上观测太阳的位置和地球观测太阳的一致, 7月末的太阳位于巨蟹座.

**2.1** 从所提供的历表, 我们可以得到月食(中点)时的赤经和赤纬, 即: 月球L = 20h28m, L = –1855; 火星M = 20h32m, M = –2533.

我们可以看到此时它们赤经的差别比起赤纬的差别小得多, 因此可以得到月球中心和火星中心的角距离为 = 638.

月心与地-火间连线的距离:

*L* = *R*EL sin = 4.06 105 km 0.116 = 4.69 104 km.

月球北边缘与火星中心-地球北边缘连线的距离为:

*L*1 = *L*0 – *R*E + *R*L = 4.69 104 km – 0.64 104 km + 0.17 105 km

= 4.23 104 km.

月球北边缘-地球北边缘连线, 与火星中心-地球中心连线的角度为:

= arcsin(*L*1/*R*EL) = 559.

所以, 为了观测到月球凌地球的整个过程, 火星轨道器距离火星中心的距离必须是:

*L*2 = *R*EM sin = 0.386 au 1.496 108 km/au 0.104 = 6.02 106 km.

这就意味着, 火星轨道器的轨道半长轴应该不小于: (*L*2 + *R*M)/2, 即约为*L*/2 = 3 106 km.

以如此大的半长轴的轨道围绕火星运动是不可能的, 因为它已远大于希尔半径:

*R*H = *L*SM (*M*M/3(*M*S + *M*M))1/3 = *R*SM (*M*M/3*M*S)1/3 = 1/210 *R*SM

= 1.1 106 km.

**2.2** 此问的解答与上问类似.

为了观测到地球凌日, 火星人必须到达一个对于地球观测者来说与太阳盘面中心相反的位置上(在一个从火星人看来的太阳角半径以内).

从太阳的历表我们可以得到, 在火星大冲时, 这一位置的赤纬是: S = –1913. 对火星来说该数值应为: M = –2530. 此时, 该位置与火星的角距离为 = 617. 如果考虑到太阳盘面的角半径, 火星人需要到达的距离火星的角距离最少应该为: = 606.

所以, 为了观测到地球凌日, 火星轨道探测器必须在离火星中心的这一距离上:

*L* = *R*EM sin = 0.386 au 1.496 108 km/au 0.106 = 6.14 106 km.

这就意味着, 该火星轨道探测器的轨道半长轴应该不小于: (*L*2 + *R*M)/2, 即约为*L*/2 = 3 106 km.

以如此大的半长轴的轨道围绕火星运动是不可能的, 因为它已远大于希尔半径:

*R*H = *L*SM (*M*M/3(*M*S + *M*M ))1/3 = *R*SM (*M*M/3*M*S)1/3 = 1/210*R*SM

= 1.1 106 km.

**–3科伦坡日落**

解: **3.1** 在照片中正好半个太阳的圆盘在地平线之上, 这一点可以通过以下的特点来确认, 即, 太阳圆盘边缘在与地平线接触的地方是与地平线严格垂直的.

作为零级近似, 我们可以先暂且认为日落发生的时间是18:00本地时, 因为这是根据照片中太阳圆盘的中心正好在地平线上得来的, 其精确度可认为是2角秒, 相对应的时间误差应该为8秒钟. 接下来, 我们逐一考虑对上述零级近似需要做的修正, 以及相应的精确度.

**(1)** 经度修正.

斯里兰卡的本地时区为UT+05:30, 其所对应的经度为8230, 拍照者所在的经度为7951, 即239以西. 这就意味着, 对于拍摄者来说, 日落的时间会有239 4分钟/ = 10分钟36秒的延迟. 这一估算对应的精确度可以取为0.5(经度)或2秒(时间).

**(2)** 时间曲线的修正.

根据所提供的时间修正曲线(见2019年第四期《天文爱好者》97页表3), 在9月30日,所有与太阳相关事件的发生时间都会早10分钟, 该曲线能够提供的精确度约为半分钟.

**(3)** 在春(秋)分的时候, 太阳中心会于18:00真太阳时在正西方穿过地平线.

科伦坡9月30日傍晚与秋分的时差约为7天11小时. 在这一时差中, 太阳沿黄道移动了大约7.4. 太阳(在9月30日时)的赤纬约为 = –23.44 sin 7.4 = –3.0.

鉴于当地的地理纬度为6.9, 太阳低于秋分时的位置约为3.0 sin 6.9 = 0.36 = 22. 太阳此时降低的速率约等于15/分钟 cos cos (cos 的引入是因为太阳的视运动轨迹不是大圆, cos 的引入是因为太阳轨迹的倾斜).

在本题的情形下, cos 和cos 都非常接近于1, 所以太阳下行22用时1分钟28秒. 所以这项时间修正是负1分28秒, 修正的精确度为4秒.

**(4)** 折射效应.

在地平时大气的折射效应约为35. 太阳下行这一角度需要2分20秒, 修正值为正, 精确度为4秒.

**(5)** 地平线的变化.

相机的位置在海拔*h* = 6.5米处, 考虑到地球的半径为*R* = 6400 km, 这会带来地平线变低(2*h*/*R*)1/2 = 1.4 10–3 rad = 5. 这项修正为正20秒, 对应的精确度为2秒.

总计上述各项修正为+10分36秒 – 10分 – 1分28秒 ＋ 2分20秒 ＋ 20秒 = 1分48秒. 影响精确度的最大误差来自于时间曲线修正的度数, 误差约为半分钟, 因此, 日落的时间为18点1分48秒, 误差为半分钟. 或者写成18:02也是合理的结果.

**3.2** 当太阳低于地平6度时, 民用昏影终止. 正如我们以上计算的, 在照片拍摄时,太阳的中心位于35 + 5 = 40, 并正以以下速率向下移动: 15/分钟 cos cos = 14.87/分钟.

剩余的520所对应太阳下降的时间是21.5分钟. 所以, 最终的答案是21.5分钟.

**3.3** 从所提供的地图(见2019年第四期《天文爱好者》96页图2)上可以看到, Adams峰的高度为2243米. 在这一高度所对应的地平线的降低角度约为(2*h*A/*R*)1/2 = 2.65 10–2 rad = 131. 这比在海边多出了126. 其对应的效果是将太阳的位置相对于“视觉的地平线”抬高了126.

另外从地图上可以测得Adams峰位于科伦坡以东140千米, 其所对应的地理经度差约为115, 太阳圆盘的视位置因此也有所降低, 其对应的效果为11或约为太阳视直径的三分之一.

所以在此时太阳是可以看到的, 太阳直径的1/6位于地平之下, 5/6位于地平之上, 这些应体现在所画的图中.

**–4科伦坡-地球静止轨道卫星**

解: **4.1** 地球静止轨道卫星位于地球赤道之上, 相对于地球完全不动.

需要指出的是地球同步轨道卫星和地球静止轨道卫星有所不同, 地球静止轨道卫星是地球同步轨道卫星的一种.

地球静止轨道卫星的正圆轨道半径*R*满足以下条件: 2*R*st = *GM*/*R*st2, *R*st3 = *GM*/2 = *GMT*2/42.

其中*G*为引力常数, *M*为地球质量. *T*为地球的自转周期(23h56m04s). 此计算给出的轨道半径为: *R*st = 42160 km.

很显然, 位于观察者的子午线上的卫星有着最小的天顶距. 该天顶距*z* = + , 其中是观测者的纬度, 则为科伦坡到赤道面距离对卫星的张角, 则: tan = *r* sin /(*R* – *r* cos ).

由此可得: = 114.

依次得到: *z* = 0808.

**4.2** 假设该卫星可以在2等星可见的黑夜中被观测到(可以近似认为每晚在进入民用昏影时之后可以看到, 除去卫星可能进入地球阴影的情形外). 这一时长平均为每天11h12m (即: 12h – 2 24m), 这一时长在夏季为11h00m, 冬季则为11h24m. 很容易理解,在夏季和冬季时, 该卫星不会进入到地球的阴影里, 因此整夜可见.

但是在每年的春秋分前后, 该卫星每天会进入地球阴影. 它在阴影里的最大时长应为: *T* = 24h 0.9 *D*E/2*R*st.

其中*D*E为地球的直径, 系数0.9源自地球阴影的锥形形状, 计算可得: *T*max = 62分钟.

所以, 在春秋分前后, 卫星每晚的可见时间11h12m, 还需要减去62分钟. 所以该问题的最终答案是: 10h20m至11h24m.

**4.3** 让我们来比较地面观测者(O)所接收到的来自于卫星(S)和来自于满月(L)的光流量.

如果*W*为太阳光在地球附近的流量;

*i*为被观测物体的反照率;

*Si* = *pri*2 = *pdi*2/4, 其中*ri*和*di*分别为被观测物体的半径和直径;

*Ri*为被观测物体到观测者的距离.

观测者收到月球的光流量:

;

观测者收到卫星的光流量:

;

对于光亮的金属表面: S = 1,

由上可得: *I*L/*I*S = 2*a*L(*d*L/*d*S)2(*R*SO/*R*LO)2.

从所提供的行星数据表可得:

.

*d*S = 3.475 106 m (2 0.07 1.3 10–6)1/2 3.6 107 m/3.8 108 m

= 140 m.

**–5奥尔特云**

解: 每百年我们能看到10至20个亮彗星, 意味着在外奥尔特云平均每6年8个月( = 2.1 108 s)两个彗星体会发生碰撞并使其中一个进入太阳系的内部区域.

碰撞的发生是因为这些彗星体在做无规运动, 其速度不高于第二宇宙速度且不低于第一宇宙速度的二分之一.

为了计算简单, 我们取它们在距离(*R* + *r*)/2 = 0.5 ly处的第一宇宙速度为它们的平均速度:

*u* = {*GM*/[(*R* + *r*)/2]}1/2 = 170 m/s.

这里*M*为太阳质量, *R*和*r*分别为奥尔特云的内外半径.

下面我们来找出碰撞频率和彗星体密度之间的关系.如果*N*是彗星体的总数, 那么它们的空间密度应为: *n* = *N*/4/3*R*3.

考虑到, 在这里*r*3远远小于*R*3. 我们同时假设每个彗星体相对于其他彗星体的运动速度为*u*. 在时长内, 一个彗星体行走的距离为*u*, 其扫过的空间体积为: *V* = *ud*2/4.

这里*d*为彗星体的平均直径, 我们取为2.5 km. 如果任何其他的彗星体进入这一空间内, 就会发生一次碰撞, 其概率为: = *nV*1 = *nud*2/4.

因为*N*中的任何一个彗星体都可能碰撞, 碰撞的总数为: *K* = *aN* = 3*uN*2*d*2/16*R*3.

每次碰撞都会使我们的彗星体有一定的几率进入太阳系的内部区域, 这个几率需要用另一个不同的模型来估算, 让我们用立体角的比例来计算它: = *r*2/4*r*2 = 0.015.

所以, 为了使一个彗星体能够进入太阳系的内部区域, 以下条件是必须的: *K* = 1.

由此可得: *N* = 4*R*3/2/*d*(3*u*)1/2 = 2.6 1016, 此值可近似为3 1016.

如果彗星体的密度为*n*, 则每个彗星体占有的体积为总体积的1/*n*, 它们之间的平均距离为(1/*n*)1/3. 所以: *L* = 1/*n*1/3 = *R*1/2(*d*)1/3(*u*/3)1/6 = 4 1010 m.

这大约是地球与金星间的最小距离.

为了计算彗星体的总质量, 我们假设彗星体的密度与冰类似, 即 = 900 kg/m3, 其平均体积为*v* = 1/6*d*3. 所以, 一个彗星体的平均质量为: *M* = *v* = 1/6*d*3 = 7 1012 kg.

所有彗星体的总质量为: *M* = *Nm* = 2 1029 kg. 这个数值与木星质量的100倍, 或太阳质量的十分之一类似.